地形作用下大气方程组解的渐近性质*

李建平
(中国科学院大气物理研究所大气科学和地球流体力学数值模拟国家重点实验室,北京 100080)
丑纪范
(兰州大学大气科学系,兰州 730000)

摘要　利用含参数的积分性质,在基本的泛函空间中研究了完整的大气运动算子方程的算子性质及其物理意义. 在此基础上讨论了有地形作用下大气方程组解的渐近性态. 得到大气方程组全局吸引子的存在性定理,从而把过去在不考虑地形作用下大气方程组定性理论的结果推广到有地形作用下的情形.

关键词　地形作用　算子方程　全局吸引子　渐近性态　含参数积分

自 80 年代初大气动力学方程组的定性全局分析理论[1]开始至今,在这个方向上进行了系统的基础理论工作[1~15],得到强迫耗散非线性大气系统解的渐近状态的一些普遍结论——大气吸引子的存在和大气系统有向外源的非线性适应过程等,并揭示出强迫、耗散和非线性作用对解的渐近行为的影响以及大气多平衡态的根源. 在理论结果的基础上探讨了一些实际应用[9,16~20],显示出定性理论的广阔应用前景. 不过,过去的定性理论研究未能考虑地形作用,这主要是由于考虑了地形的动力作用后,给理论研究带来很大困难. 显然这限制了已有的定性理论结果的适用范围. 天气诊断分析和数值模拟研究都表明,地形的动力强迫作用对大气运动有很大影响. 因此,真实的大气运动应是考虑了地形作用的,研究有地形作用下大气运动的长时间性态也有着基础性的意义. 在考虑了地形动力强迫作用后过去的结果是否仍然成立呢? 这是一个重要而实际的问题. 本文利用含参数的积分性质,研究了有地形作用的大气方程组解的渐近性态,拓广了过去的理论结果.

1　问题描述

在球坐标系(θ,λ,r)中,坐标原点 0 在地心,坐标 θ,λ 和 r 分别是余纬、经度和地心距离,引入向量函数 $\varphi=(\tilde{u},\tilde{v},\tilde{w},\tilde{\rho},\tilde{T})'$,其中$'$表示转置,$(\tilde{u},\tilde{v},\tilde{w},\tilde{\rho},\tilde{T})'=\rho^*(u^*,v^*,w^*,\phi^*,T^*)'$, $u^*=u/\sqrt{2}$, $v^*=v/\sqrt{2}$, $w^*=w/\sqrt{2}$, $\phi^*=\sqrt{\phi}$, $\rho^*=\sqrt{\rho}$, $T^*=\sqrt{C_V}\hat{T}=\sqrt{C_VT}$. 于是,完整的大气动力学方程组可化为如下等价的算子方程(这里仅考虑干空气,对于湿大气本文的结论同样成立):

1998-03-11 收稿,1998-10-14 收修改稿
* 国家重点基础研究发展规划(批准号:G1998040901-1)和国家自然科学基金(批准号:49805006)资助项目

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + (N(\varphi) + L(\varphi))\varphi = \xi(\varphi), \tag{1}$$

$$\varphi\mid_{t=0} = \varphi_0, \tag{2}$$

式中

$$N(\varphi) = \begin{bmatrix} \mathscr{R} & f + u\mathrm{ctg}\theta/r & \tilde{f} + u/r & 0 & l'_1 G \\ -(f + u\mathrm{ctg}\theta/r) & \mathscr{R} & v/r & 0 & l'_2 G \\ -(\tilde{f} + u/r) & -v/r & \mathscr{R} & g/\sqrt{2}\phi^* & l'_3 G \\ 0 & 0 & -g/\sqrt{2}\phi^* & \mathscr{R} & 0 \\ Gl_1 & Gl_2 & Gl_3 & 0 & \mathscr{R} \end{bmatrix}, \tag{3}$$

$$L(\varphi) = \begin{bmatrix} -\hat{\mu}l'_1 l_1 - \mu l_4 - l & -\hat{\mu}l'_1 l_2 & -\hat{\mu}l'_1 l_3 & 0 & 0 \\ -\hat{\mu}l'_2 l_1 & -\hat{\mu}l'_2 l_2 - \mu l_4 - l & -\hat{\mu}l'_2 l_3 & 0 & 0 \\ -\hat{\mu}l'_3 l_1 & -\hat{\mu}l'_3 l_2 & -\hat{\mu}l'_3 l_3 - \mu l_4 - l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -l_5 - l'_5 \end{bmatrix}, \tag{4}$$

$$\xi(\varphi) = (0,0,0,0,(\varepsilon + \hat{C}\alpha_S T_S)/2\tilde{T})', \tag{5}$$

$$\mathscr{R} = (\Pi + \Lambda)/2,\ \Pi = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\lambda}u + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}v\sin\theta + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2 w,$$

$$\Lambda = \frac{u}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\lambda} + \frac{v}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + w\frac{\partial}{\partial r},\ f = 2\Omega\cos\theta,\ \tilde{f} = 2\Omega\sin\theta,$$

$$G = R\tilde{T}/\sqrt{2}C_V,\ \phi = gr,\ \hat{\mu} = \mu/3,$$

$$l = \frac{1}{\rho^* r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{k_\lambda}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{1}{\rho^*} + \frac{1}{\rho^* r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{k_\theta\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{1}{\rho^*} + \frac{1}{\rho^* r^2}\frac{\partial}{\partial r}k_r r^2\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{\rho^*},$$

$$l_1 = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{1}{\rho^*},\ l'_1 = \frac{1}{\rho^* r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\lambda},\ l_2 = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\sin\theta}{\rho^*},\ l'_2 = \frac{1}{\rho^* r}\frac{\partial}{\partial\theta},$$

$$l_3 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\frac{r^2}{\rho^*},\ l'_3 = \frac{1}{\rho^*}\frac{\partial}{\partial r},\ l_4 = \frac{1}{\rho^*}\Delta\frac{1}{\rho^*},$$

$$l_5 = \frac{1}{\rho^* r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{K_\lambda}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{1}{\rho^*} + \frac{1}{\rho^* r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{K_\theta\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{1}{\rho^*} + \frac{1}{\rho^* r^2}\frac{\partial}{\partial r}K_r r^2\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{\rho^*} - C_K\alpha_S T_S/2\tilde{T}^2,$$

$$l'_5 = \frac{1}{\tilde{T}^2}\left[\frac{\kappa_\lambda}{r^2\sin^2\theta}\left(\frac{\partial\hat{T}}{\partial\lambda}\right)^2 + \frac{\kappa_\theta}{r^2}\left(\frac{\partial\hat{T}}{\partial r}\right)^2 + \kappa_r\left(\frac{\partial\hat{T}}{\partial r}\right)^2\right] + \frac{\kappa_\theta}{C_V\rho^* r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}\frac{1}{\rho^*} + \frac{\kappa_\lambda}{C_V\rho^* r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{1}{\rho^*} + \frac{\kappa_r}{C_V\rho^* r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{\rho^*} - C_\kappa\alpha_S T_S/2\tilde{T}^2,$$

$$\hat{C} = C_K + C_\kappa,\ C_K = C_V K_{r_S} r_S^2 C_r^{-1},\ C_\kappa = \kappa_{r_S} r_S^2 C_r^{-1},\ C_r = \int_{r_S}^{r_\infty} r^2 \mathrm{d}r, \tag{6}$$

其中 ϵ 表示非绝热加热，$\upsilon = \mu/\rho$ 为运动的分子粘性系数，μ 为动力的分子粘性系数，κ_λ，κ_θ，κ_r 分别表示水平和垂直方向上的分子热扩散系数，k_λ，k_θ，k_r 分别为水平和垂直方向上的湍流粘性系数，K_λ，K_θ，K_r 分别为水平和垂直方向上的湍流导热系数．求解区域为 $\Omega = S^2 \times (r_S, r_\infty)$，这里 $r_S = r_S(\theta,\lambda)$ 是余纬为 θ、经度为 λ 的地球表面至地心的距离，r_∞ 是任意大的正数，$0 < r_S < r_\infty < \infty$．边界条件为(i)下边界条件：在地表面 $r = r_S$ 上，考虑地形起伏的作用，有

$$w = \frac{u}{r_S \sin\theta}\frac{\partial r_S}{\partial \lambda} + \frac{v}{r_S}\frac{\partial r_S}{\partial \theta}, \tag{7}$$

$$(\partial u/\partial r,\ \partial v/\partial r) = (C_{DK}u,\ C_{DK}v), \tag{8}$$

$$\partial T/\partial r = \alpha_S(T - T_S), \tag{9}$$

其中 $C_{DK} = C_{DK}(\theta,\lambda)$ 是与拖曳系数(取决于地面粗糙度、稳定度等)和湍流涡动有关的系数，$T_S = T_S(\theta,\lambda)$ 为地表面(海面和陆面)上的温度，$\alpha_S = \alpha_S(\theta,\lambda)$ 是与湍流导热率有关的参数，它依赖于地面特征．(ii)上边界条件：在大气层顶 $r = r_\infty$，有

$$(\rho u^2, \rho v^2, \rho w^2, \rho\phi, \rho T) = 0, \tag{10}$$

$$(\partial u/\partial r,\ \partial v/\partial r,\ w,\ \partial T/\partial r) = 0. \tag{11}$$

因为考虑了地形，地表面就不是过去定性理论研究时考虑的等半径的球面，而是 θ,λ 的函数，即 $r_S = r_S(\theta,\lambda)$，因此所用的基本泛函空间也要重新定义，相应的算子的性质也得重新研究．本文就是研究方程(1)在初边值条件(2)，(7)~(11)下在区域 Ω 上解的渐近性质．

2 基本空间和预备引理

令 $H_0(\Omega)$ 为装载如下内积和范数的完备化空间：

$$(\varphi_1, \varphi_2) = \int_\Omega \varphi'_1 \varphi_2 \mathrm{d}\Omega = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_{r_S}^{r_\infty} \varphi'_1 \varphi_2 r^2 \sin\theta \mathrm{d}r \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\lambda, \tag{12}$$

$$\| \varphi \|_0 = (\varphi, \varphi)^{1/2}. \tag{13}$$

令 $H_1(\Omega)$ 为装载如下范数的完备化空间：

$$\| \Psi \|_1 = (\| u^* \|_{H^1(\Omega)}^2 + \| \nu^* \|_{H^1(\Omega)}^2 + \| w^* \|_{H^1(\Omega)}^2 + \| \rho^* \|_{H^1(\Omega)}^2 + \| T^* \|_{H^1(\Omega)}^2), \tag{14}$$

其中 $\Psi = (u^*, v^*, w^*, \rho^*, T^*)'$，$\| \cdot \|_{H^1(\Omega)}$ 取 $H^1(\Omega)$ 中范数，$H^1(\Omega)$ 是标准的 Sobolev 空间．

引理1 在 $H_0(\Omega)$ 中可用如下等价范数：

$$\| \varphi \|_0 = (\| \tilde{u} \|^2 + \| \tilde{v} \|^2 + \| \tilde{w} \|^2 + \| \rho^* \|^2 + \| \tilde{T} \|^2)^{1/2}. \tag{15}$$

令 $N^*(\varphi)$，$L^*(\varphi)$ 分别是 $N(\varphi)$，$L(\varphi)$ 的伴随算子，则有

引理2 $N(\varphi) = -N^*(\varphi)$，$L(\varphi) = L^*(\varphi)$，$\forall \varphi \in H_0(\Omega)$，称 $N(\varphi)$ 为反伴算子，$L(\varphi)$ 为自伴算子．

证 因为

$$(N(\varphi)\varphi,\varphi^*)=\int_\Omega\Big\{[\mathscr{R}\tilde{u}+(f+u\mathrm{ctg}\theta/r)\tilde{v}+(\tilde{f}+u/r)\tilde{w}+l'_1G\tilde{T}]\tilde{u}^*+$$
$$[-(f+u\mathrm{ctg}\theta/r)\tilde{u}+\mathscr{R}\tilde{v}+v\tilde{w}/r+l'_2G\tilde{T}]\tilde{v}^*+$$
$$[-(\tilde{f}+u/r)\tilde{u}-v\tilde{v}/r+\mathscr{R}\tilde{w}+g\tilde{\rho}/(\sqrt{2}\phi^*)+l'_3G\tilde{T}]\tilde{w}^*+$$
$$[-gw/(\sqrt{2}\phi^*)+\mathscr{R}\tilde{\rho}]\rho^*+[Gl_1\tilde{u}+Gl_2\tilde{v}+Gl_3\tilde{w}+\mathscr{R}\tilde{T}]\tilde{T}^*\Big\}\mathrm{d}\Omega,\quad(16)$$

所以要证明引理 2 的第一部分只需证明下面 3 式,其余显而易见.

$$\int_\Omega(\mathscr{R}\tilde{F})\tilde{F}^*\mathrm{d}\Omega=-\int_\Omega\tilde{F}(\mathscr{R}\tilde{F}^*)\mathrm{d}\Omega,\quad(17)$$

其中 $F=u,v,w,\rho$ 或 T,

$$\int_\Omega[(l'G_1\tilde{T})\tilde{u}^*+(l'_2G\tilde{T})\tilde{v}^*+(l'_3G\tilde{T})\tilde{w}^*]\mathrm{d}\Omega=$$
$$-\int_\Omega\tilde{T}[Gl_1\tilde{u}^*+Gl_2\tilde{v}^*+Gl_3\tilde{w}^*]\mathrm{d}\Omega,\quad(18)$$

$$\int_\Omega[Gl_1\tilde{u}+Gl_2\tilde{v}+Gl_3\tilde{w}]\tilde{T}^*\mathrm{d}\Omega=-\int_\Omega[\tilde{u}(l'_1G\tilde{T}^*)+\tilde{v}(l'_2G\tilde{T}^*)+\tilde{w}(l'_3G\tilde{T}^*)]\mathrm{d}\Omega.\quad(19)$$

对于(17)式,只证明当 $F=u$ 的情形,即

$$\int_\Omega(\mathscr{R}\tilde{u})\tilde{u}^*\mathrm{d}\Omega=\int_\Omega[2^{-1}(\Pi+\Lambda)\tilde{u}]\tilde{u}^*\mathrm{d}\Omega=$$
$$-\int_\Omega\tilde{u}[2^{-1}(\Pi+\Lambda)\tilde{u}^*]\mathrm{d}\Omega=-\int_\Omega\tilde{u}(\mathscr{R}\tilde{u}^*)\mathrm{d}\Omega.\quad(20)$$

其他仿此.

因为

$$\int_\Omega\frac{\tilde{u}^*}{r\sin\theta}\frac{\partial u\tilde{u}}{\partial\lambda}\mathrm{d}\Omega=\int_0^{2\pi}\int_0^\pi\int_{r_s}^{r_\infty}\frac{\tilde{u}^*}{r\sin\theta}\frac{\partial u\tilde{u}}{\partial\lambda}r^2\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\lambda=$$
$$\int_0^{2\pi}\int_0^\pi\int_{r_s}^{r_\infty}\left[\frac{\partial(r\tilde{u}^*u\tilde{u})}{\partial\lambda}-\frac{u\tilde{u}}{r\sin\theta}\frac{\partial\tilde{u}^*u}{\partial\lambda}r^2\sin\theta\right]\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\lambda=$$
$$\int_0^{2\pi}\int_0^\pi\left[\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\int_{r_s}^{r_\infty}r\tilde{u}^*u\tilde{u}\mathrm{d}r\right)+r\tilde{u}^*u\tilde{u}\frac{\partial r}{\partial\lambda}\Big|_{r=r_s}\right]\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\lambda-\int_\Omega\frac{\tilde{u}u}{r\sin\theta}\frac{\partial\tilde{u}^*}{\partial\lambda}\mathrm{d}\Omega=$$
$$\int_0^{2\pi}\int_0^\pi(r\tilde{u}^*u\tilde{u}\partial r/\partial\lambda)\big|_{r=r_s}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\lambda-\int_\Omega\tilde{u}ur^{-1}\sin^{-1}\theta\partial\tilde{u}^*/\partial\lambda\mathrm{d}\Omega,\quad(21)$$

同理,有

$$\int_\Omega\frac{\tilde{u}^*}{r\sin\theta}\frac{\partial v\tilde{u}}{\partial\theta}\mathrm{d}\Omega=\int_0^{2\pi}\int_0^\pi(r\tilde{u}^*v\tilde{u}\sin\theta\partial r/\partial\theta)\big|_{r=r_s}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\lambda-$$
$$\int_\Omega\tilde{u}vr^{-1}\partial\tilde{u}^*/\partial\theta\mathrm{d}\Omega,\quad(22)$$

$$\int_\Omega\frac{\tilde{u}^*}{r^2}\frac{\partial r^2w\tilde{u}}{\partial r}\mathrm{d}\Omega=\int_0^{2\pi}\int_0^\pi-(r\tilde{u}^*u\tilde{u}\partial r/\partial\lambda+$$

$$\tilde{ru}^* \tilde{vu}\sin\theta\partial r/\partial\theta)\mid_{r=r_s}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\lambda - \int_\Omega \tilde{u}w\partial\tilde{u}^*/\partial r\mathrm{d}\Omega, \tag{23}$$

其中(23)式用到下边解条件(7). 由(21)+(22)+(23)式有

$$\int_\Omega (\Pi\tilde{u})\tilde{u}^*\mathrm{d}\Omega = \int_\Omega \tilde{u}(-\Lambda\tilde{u}^*)\mathrm{d}\Omega. \tag{24}$$

同理可证

$$\int_\Omega (\Lambda\tilde{u})\tilde{u}^*\mathrm{d}\Omega = \int_\Omega \tilde{u}(-\Pi\tilde{u}^*)\mathrm{d}\Omega. \tag{25}$$

由(24)+(25)式即得(17)式成立.

下面证明(18)式,因为

$$\begin{aligned}\int_\Omega (l'_1 G\tilde{T})\tilde{u}^*\mathrm{d}\Omega = &\int_0^{2\pi}\int_0^\pi\int_{r_s}^{r_\infty}\frac{\tilde{u}^*}{\rho^* r\sin\theta}\frac{\partial G\tilde{T}}{\partial\lambda}r^2\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\lambda = \\ &\int_0^{2\pi}\int_0^\pi\int_{r_s}^{r_\infty}\left[\frac{\partial(\tilde{ru}^* G\tilde{T}\rho^{*-1})}{\partial\lambda} - \frac{G\tilde{T}}{r\sin\theta}\frac{\partial(\tilde{u}^*\rho^{*-1})}{\partial\lambda}r^2\sin\theta\right]\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\lambda = \\ &\int_0^{2\pi}\int_0^\pi \tilde{ru}^* G\tilde{T}\rho^{*-1}\partial r/\partial\lambda\mid_{r=r_s}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\lambda - \int_\Omega \tilde{T}Gl_1\tilde{u}^*\mathrm{d}\Omega,\end{aligned} \tag{26}$$

$$\int_\Omega (l'_2 G\tilde{T})\tilde{v}^*\mathrm{d}\Omega = \int_0^{2\pi}\int_0^\pi \tilde{rv}^* G\tilde{T}\sin\theta\rho^{*-1}\partial r/\partial\theta\mid_{r=r_s}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\lambda - \int_\Omega \tilde{T}Gl_2\tilde{v}^*\mathrm{d}\Omega, \tag{27}$$

$$\begin{aligned}\int_\Omega (l'_3 G\tilde{T})\tilde{w}^*\mathrm{d}\Omega = &\int_0^{2\pi}\int_0^\pi -(\tilde{ru}^* G\tilde{T}\rho^{*-1}\partial r/\partial\lambda + \\ &\tilde{rv}^* G\tilde{T}\sin\theta\rho^{*-1}\partial r/\partial\theta)\mid_{r=r_s}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\lambda - \int_\Omega \tilde{T}Gl_3\tilde{w}^*\mathrm{d}\Omega.\end{aligned} \tag{28}$$

所以(26)+(27)+(28)式得(18)式成立. 仿此可证(19)式成立.

综上所述,有

$$N^*(\varphi) = \begin{bmatrix} -\mathscr{R} & -(f+u\mathrm{ctg}\theta/r) & -(\tilde{f}+u/r) & 0 & -l'_1 G \\ f+u\mathrm{ctg}\theta/r & -\mathscr{R} & -v/r & 0 & -l'_2 G \\ \tilde{f}+u/r & v/r & -\mathscr{R} & -g/\sqrt{2}\phi^* & -l'_3 G \\ 0 & 0 & g/\sqrt{2}\phi^* & -\mathscr{R} & 0 \\ -Gl_1 & -Gl_2 & -Gl_3 & 0 & -\mathscr{R}\end{bmatrix}, \tag{29}$$

同样经过繁杂的推导可得 $L(\varphi)=L^*(\varphi)$. 证毕.

引理 3 $L(\varphi)$是对称的,$N(\varphi)$是反对称的,即

$$(L(\varphi)\varphi_1,\varphi_2) = (\varphi_1, L(\varphi)\varphi_2),\ (N(\varphi)\varphi_1,\varphi_2) = -(\varphi_1, N(\varphi)\varphi_2),\ \forall\varphi,\varphi_1,\varphi_2\in H_0(\Omega). \tag{30}$$

因为

$$\begin{aligned}(L(\varphi)\varphi,\varphi) = \int_\Omega\Big\{&\hat{\mu}(\nabla\cdot V^*)^2 + (\mu+k_\lambda)\nabla u^*\cdot\nabla u^* + \\ &(\mu+k_\theta)\nabla v^*\cdot\nabla v^* + (\mu+k_r)\nabla w^*\cdot\nabla w^* + \\ &K_\lambda r^{-2}\sin^{-2}\theta(\partial T^*/\partial\lambda)^2 + K_\theta r^{-2}(\partial T^*/\partial\theta)\setminus +2 + K_r(\partial T^*/\partial r)^2\Big\}\mathrm{d}\Omega +\end{aligned}$$

$$\int_{S^2\times\{r_S\}}\left[C_{DK}(\mu+k_{r_S})\boldsymbol{V}^*\cdot\boldsymbol{V}^*+2^{-1}(K_{r_S}+\kappa_{r_S}C_V^{-1})\alpha_S T^{*2}\right]r_S^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\lambda, \tag{31}$$

其中 $\boldsymbol{V}^*=v^*\boldsymbol{\theta}^\circ+u^*\boldsymbol{\lambda}^\circ+w^*\boldsymbol{r}^\circ$,于是有

引理 4

$$(L(\varphi)\varphi,\varphi)\geqslant 0, \tag{32}$$

式中等号当且仅当 $\|\varphi\|_0=0$ 时成立.

引理 5　存在常数 $C>0$,使得

$$\|\varphi\|_0^2\leqslant C\|\psi\|_0^2, \tag{33}$$

$\forall\varphi=(\tilde{u},\tilde{v},\tilde{w},\tilde{\rho},\tilde{T})',\ \psi=(u^*,v^*,w^*,\rho^*,T^*)'\in H_0(\Omega)$.

引理 6　存在常数中 $C_1>0$,使得

$$C_1|\psi|_1^2\leqslant(L(\varphi)\varphi,\varphi), \tag{34}$$

$$C_1|\psi|_0^2\leqslant(L(\varphi)\varphi,\varphi), \tag{35}$$

其中 $\varphi=(\tilde{u},\tilde{v},\tilde{w},\tilde{\rho},\tilde{T})'$, $\varphi=(u^*,v^*,w^*,\rho^*,T^*)'\in H_0(\Omega)$, $|\psi|_1=(\|u^*\|_{H^1}^2+\|v^*\|_{H^1}^2+\|w^*\|_{H^1}^2+\|T^*\|_{H^1}^2)^{1/2}$, $|\varphi|_0=(\|u^*\|^2+\|v^*\|^2+\|w^*\|^2+\|T^*\|^2)^{1/2}$.

证　根据(31)式,只需要证明存在常数 $C>0$,使得

$$C\left(\int_{\partial\Omega_1}f^{*2}\mathrm{d}s+|f^*|_1^2\right)\geqslant\|f^*\|_0^2, \tag{36}$$

其中 $f=u,v,w$ 或 T.

$f^*=gq$,其中 q 是引入的未知函数,g 是待定函数. 于是

$$\begin{aligned}\int_\Omega\nabla f^*\cdot\nabla f^*\mathrm{d}\Omega&=\int_\Omega\Big[g^2\nabla q\cdot\nabla q-q^2g\Delta g+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(q^2g\frac{\partial g}{\partial\lambda}\right)+\\&\quad\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(q^2g\sin\theta\frac{\partial g}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(q^2gr^2\frac{\partial g}{\partial r}\right)\Big]\mathrm{d}\Omega\geqslant\\&\quad\int_\Omega\Big[-q^2g\Delta g+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(q^2g\frac{\partial g}{\partial\lambda}\right)+\\&\quad\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(q^2g\sin\theta\frac{\partial g}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(q^2gr^2\frac{\partial g}{\partial r}\right)\Big]\mathrm{d}\Omega\geqslant\\&\quad-\int_\Omega q^2g\Delta g\mathrm{d}\Omega+\int_{\partial\Omega_2}q^2g\partial g/\partial r\mathrm{d}S^2-\int_{\partial\Omega_1}q^2g\partial g/\partial r\mathrm{d}S^2,\end{aligned}$$

其中$\partial\Omega_1=S^2\times\{r_S\}$, $\partial\Omega_2=S^2\times\{r_\infty\}$. 所以,

$$-\int_\Omega q^2\Delta g/g\mathrm{d}\Omega\leqslant\int_\Omega\nabla f^*\cdot\nabla f^*\mathrm{d}\Omega+\left|\int_{\partial\Omega_1}q^2g\partial g/\partial r\mathrm{d}S^2\right|+\left|\int_{\partial\Omega_2}q^2g\partial g/\partial r\mathrm{d}S^2\right|,$$

即

$$\begin{aligned}-\int_\Omega f^{*2}\Delta g/g\mathrm{d}\Omega&\leqslant\int_\Omega\nabla f^*\cdot\nabla f^*\mathrm{d}\Omega+\left|\int_{\partial\Omega_1}f^{*2}g^{-1}\partial g/\partial r\mathrm{d}S^2\right|+\\&\quad\left|\int_{\partial\Omega_2}f^{*2}g^{-1}\partial g/\partial r\mathrm{d}S^2\right|.\end{aligned} \tag{37}$$

由(37)式知,若存在 g 满足

$$-\Delta g/g \geqslant k_1 > 0,\ |g^{-1}\partial g/\partial r|_{\partial\Omega_1} \leqslant k_2,\ |g^{-1}\partial g/\partial r|_{\partial\Omega_2} = 0, \tag{38}$$

这里 k_1, k_2 都是正常数. 则由(37)式得

$$k_1\int_\Omega f^{*2}\mathrm{d}\Omega \leqslant \int_\Omega \nabla f^* \cdot \nabla f^* \mathrm{d}\Omega + k_2\int_{\partial\Omega_1} f^{*2}\mathrm{d}S^2. \tag{39}$$

取

$$c = \max(1/k_1, k_2/k_1),$$

即得不等式(36),对 $f = u, v, w$ 时,再取

$$K_2 = c^{-1}\min(\mu + K_\lambda,\ \mu + K_\theta,\ \mu + K_r,\ C_{DK}(\mu + k_{r_S})),$$

对 $f = T$ 时,再取

$$\tilde{K}_2 = c^{-1}\min(K_\lambda, K_\theta, K_r, 2^{-1}(K_{r_S} + \kappa_{r_S}C_V^{-1})\alpha_S),$$

即得不等式(35).

满足(38)式的函数是很多的. 例如可取

$$g = \cos\theta\sin\frac{\lambda}{2}\sin\frac{\pi a}{2r^*}, \tag{40}$$

其中 $a = r_\infty + b$, $r^* = r + b$, $b > 0$ 满足 $b \neq (2nr_S + r_\infty)/2n$. 此时,

$$k_1 = \left(\frac{9}{4r_\infty^2} + \frac{\pi^2}{4(r_\infty + b)^2}\right),$$

k_2 为某正的常数. 证毕.

3 主要结果

根据引理1~6,我们就能容易地得到以下主要结果,注意到

$$\|\psi\|_0^2 \leqslant \|\psi\|_1^2,$$
$$C_1|\psi|_1^2 + C_1\|\rho^*\|^2 = C_1\|\psi\|_1^2,$$

再由引理5,6有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\varphi\|_0^2 + 2\tilde{C}\|\varphi\|_0^2 \leqslant 2(C_m + |\zeta(t)|), \tag{41}$$

其中 $\tilde{C}$ 为一正常数,

$$C_m = C_1\|\rho^*\|^2, \tag{42}$$

$$|\zeta| = 2^{-1}\int_\Omega(|\varepsilon| + |\hat{C}\alpha_S T_S|)\mathrm{d}\Omega, \tag{43}$$

其中 $\hat{C}$ 由(6)式给出. 对连续性方程在 Ω 上积分并由边界条件有 $\|\rho^*\|^2 = \int_\Omega \rho\mathrm{d}\Omega =$ 常数,此即质量守恒定律的另一表达,所以 C_m 为一常数. 根据(41)式,由经典的 Gronwall 不等式有

定理1 具有边值条件(7)~(11)的算子方程(1),(2)的解 φ 满足

$$\|\varphi(t)\|_0^2 \leqslant \left\{\|\varphi\|_0^2 + 2\int_0^t e^{\tilde{c}t}\left(C_m + |\zeta|\right)\mathrm{d}t\right\}e^{-\tilde{c}t},\ t \in [0, T], \tag{44}$$

其中 $\tilde{C}$, C_m, $|\zeta|$ 分别由(41)~(43)式给出.

由定理 1 易得如下全局吸收集的存在性定理.

定理 2　令

$$B_k = \left\{\varphi = (\tilde{u},\tilde{v},\tilde{w},\tilde{\rho},\tilde{T})' \in H_0(\Omega) \,\middle|\, \|\varphi\|_0^2 \leqslant K^2)\right\}, \tag{45}$$

其中 $\widetilde{M} = 2(C_m + |\zeta|)\tilde{C}^{-1}$, $K > \widetilde{M}^{1/2}$,方程(1),(2)的解满足

(1)若 $\varphi_0 \in B_k$,则对 $\forall\, t \geqslant 0, \varphi(t) \in B_k$;

(2)若 $\varphi_0 \notin B_k$,则对 $\forall\, t \geqslant \tau, \varphi(t) \in B_k$,

其中 $\tau = \tilde{C}^{-1}\ln(\|\varphi_0\|_0^2 - \widetilde{M}K^{-1} - \widetilde{M})$.

全局吸收集 B_k 的存在,说明大气系统是一个耗散系统,"耗散结构"的性质,是大气运动的一个基本特征. B_k 外的点代表暂态过程,说明系统具有明显的不可逆特性. 由定理 2 进一步可得.

定理 3　算子方程(1),(2)存在全局吸引子 $\mathscr{A}$.

此定理表明,在考虑了地形作用后,完整的大气方程组仍然存在全局吸收子 $\mathscr{A}$. 全局吸引子的存在性揭示出大气系统具有向下垫面温度 T_S(见(43)式)、地形作用(体现在(43)式中的 $\hat{C}$)以及其他外源强迫(体现在(43)式中的 ε)的非线性适应过程.

4　小结

本文从完整的大气方程组出发,研究了有地形作用下大气方程组解的渐近性态. 利用含参数的积分性质,在基本的泛函空间中讨论了大气算子方程的算子的性质,在此基础上得到大气方程组全局吸引子的存在性定理. 这样就把过去在不考虑地形作用下大气方程组定性理论的结果推广到有地形作用下的情形,使过去的理论结果有了更广的适用范围.

参　考　文　献

1　丑纪范. 初始场作用的衰减与算子的特性. 气象学报,1983,41(4):385~392

2　Chou Jifan. Some general properties of the atmospheric model in H space, R space, point mapping, cell mapping Proceedings of International Summer Colloquium on Nonlinear Dynamics of the Atmosphere, 10~30 Aug. Beijing: Science Press, 1986. 187~189

3　汪守宏,黄建平,丑纪范. 大尺度大气运动方程组解的一些性质. 中国科学,B 辑,1989,19(3):328~336

4　Lions J L, Temam R, Wang S. New formulations of the primitive equations of atmosphere and applications. Nonlinearity, 1992, 5: 237~228

5　Wang S. Attractors for the 3D baroclinic quasi-geostrophic equations of large scale atmosphere. J Math Anal Appl, 1992, 165: 266~283

6　Lions J L, Temam R, Wang S. On the equations of large-scale ocean. Nonlinearity, 1992, 5: 1 007~1 053

7　Lions J L, Temam R, Wang S. Mathematical models and mathematical analysis of the Ocean/Atmosphere system. C R Acad Sci Puris, Ser I, 1993, 316: 211~215

8　丑纪范. 大气动力学方程组的全局分析. 北京气象学院学报,1995,(1):1~12

9　丑纪范. 四维同化的理论和新方法. 见:廖洞贤等主编. 数值天气预报中的若干新技术. 北京:气象出版社,1995. 262~294

10　李建平,丑纪范. 非定常外源强迫下大气方程组解的性质. 科学通报,1995,39(13):1 207~1 209

11　丑纪范. 大气动力学的若干进展和趋势. 理代大气科学前沿与展望. 北京:气象出版社,1996. 71~75

12　李建平,丑纪范. 大气吸引子的存在性. 中国科学,D 辑,1997,27(1):89~96

13 Lions J L, Temam R, Wang S. Mathematical theory for the coupled atmoshpere-ocean models (CAO Ⅲ). J Math Pures Appl, 1995, 74: 105~163

14 Li Jianping, Chou Jifan. Effects of external forcing, dissipation and nonlinearity on the solutions of atmospheric equations. Acta Meteor Sinica, 1997, 11(2): 57~65

15 Li Jianping, Chou Jifan. Further study on the properties of operators of atmoshperic equations and the existence of attractor. Acta Meteor Sinica, 1997, 11(2): 216~223

16 张邦林,丑纪范. 经验正交函数在气候数值模拟中的应用. 中国科学,B辑,1991,21(4):442~448

17 李志锦,丑纪范. 受下垫面强迫的一类强对流系统及预报. 中国科学,B辑,1993,23(10):1 114~1 120

18 丑纪范. 关于短期气候预测会商综合集成的探讨. 新疆气象,1995,18(5):1~7

19 董文杰,丑纪范. 利用数值模式改进汛期降水预报综合集成的初步探讨. 见:王绍武主编. 气候预测研究. 北京:气象出版社,1996. 119~130

20 郭秉容,江剑民,范新刚,等. 气候系统的非线性特征及其预测理论. 北京:气象出版社,1996