

# 大气动力学方程组的定性理论 及其应用<sup>\*</sup>

李建平<sup>\*\*</sup> 丑纪范

(兰州大学大气科学系, 兰州 730000)

**摘要** 基于完整的湿大气动力学方程组, 利用无穷维动力系统的新理论和新方法, 系统讨论了强迫耗散的非线性大气系统的定性理论及其应用。将完整的强迫耗散非线性湿大气动力学方程组化为 Hilbert 空间中一个等价的算子方程, 研究了算子的性质及其物理意义, 在此基础上得到湿大气系统全局吸引子的存在性定理, 揭示出系统向外源的非线性适应特征, 并把结果推广到有地形动力作用和非定常外源强迫的情形。同时探讨了大气方程组惯性流形的存在, 大气多平衡态产生的根源以及强迫、耗散和非线性对系统解的渐近行为的影响。在理论结果的基础上, 提出强迫耗散的非线性动力系统中存在三类时间边界层、方程组简化准则、分解算法的算子约束原则以及支撑吸引子基底的少数自由度的构造方法, 探讨了理论在非线性发展方程差分格式的设计和计算稳定性分析、多平衡态的数值分析、数值模式延伸预报的改进、短期气候预测以及一类中尺度系统分析与预测中的应用, 指出描述长期过程动力学模式的必备条件, 给出初值与模式相协调的合理解释。最后, 对今后的研究方向作了展望。

**关键词** 大气动力学 强迫耗散 非线性动力学 全局吸引子 定性分析 算子 时间边界层 多平衡态 差分格式

## 1 引言

大气是无穷维的动力系统, 其演化可用一组偏微分方程来表述, 大气动力学的研究和数值天气预报就是围绕这组方程及其各种简化形式进行的<sup>[1~4]</sup>。不过, 这是一组非常复杂的强迫耗散的非线性方程, 长期以来, 由于数学上缺乏处理这类系统的理论和方法, 因此传统的动力气象学局限在线性系统和非线性保守系统的理论框架内。这对于大气的长期过程和气候变化以及和相变潜热相联系的中小尺度的强对流系统来说有着不可克服的本质缺陷。因此, 当代大气动力学呼唤着新的动力学的基础理论——强迫耗散的非线性动力学<sup>[1~3, 5~8]</sup>。这个把强迫、耗散和非线性三者同时考虑的大气动力学研究, 其起始至今不过是十余年的事情<sup>[1, 3, 5~15, 18~24]</sup>。

强迫耗散的非线性动力学涉及的是系统的长期行为, 从数学上说就是要了解系统解的全局渐近特征。在了解非线性方程解的全局渐近行为上, 传统的间接方法(即解析方

1997 - 11 - 27 收到, 1998 - 02 - 24 收到修改稿

\* 获国家科委攀登计划基础性研究重大关键项目“气候动力学和气候预测理论的研究”的资助

\*\* 现在通讯地址: 中国科学院大气物理研究所大气科学和地球流体物理学数值模拟国家重点实验室, 北京

100080

法)、数值方法以及实验方法都有着无法克服的困难<sup>[3, 5~8, 18]</sup>。因此, 需要用微分方程定性理论的方法来解决。定性方法是直接从方程本身的特点来了解方程解的性态, 而不需要求出方程的解就能直观地、清楚地展示出非线性系统运动的主要性质和特征, 这表明定性方法具有显著优越性。看来, 在讨论大气(包括海洋)动力学方程组解的全局特征时, 定性研究是非常必要的, 也是必然的。

丑纪范<sup>[1]</sup>首先开创了强迫耗散的非线性大气动力方程组的定性理论, 他证明大尺度大气运动方程组可以简洁地写成 Hilbert 空间中的一个算子方程, 研究了算子的性质, 证明了在  $R$  空间中大气大尺度系统存在一吸引点集, 不论初始状态如何, 系统的状态都将随着时间的增长演变到吸引点集中的状态, 并证明这个终态是  $R$  空间中体积为零的点集<sup>[2,3]</sup>。后来, 文献 [13, 16, 17, 19] 分别将上述结果推广到无穷维 Hilbert 空间中、大尺度海洋动力学方程组、大尺度海气耦合系统和非定常外源强迫情形, 得到初值问题的解存在唯一及系统的全局吸引子, 证明吸引子的 Hausdorff 维数是有限的, 并给出了其估计值<sup>[14]</sup>。之后, 又进行了系列的工作<sup>[20~25]</sup>。文献 [18] 系统、完整地讨论了大气和海洋动力学方程组的定性理论, 揭示出系统的一些长期演变规律。在理论的基础上, 丑纪范及其合作者探讨了一些具体应用<sup>[11, 12, 18, 26~31]</sup>, 获得一些较好的结果, 显示出强迫耗散非线性动力学的广阔应用前景。

过去的定性理论工作大多针对的是干空气, 对湿大气讨论较少。而水汽相变潜热是大气非绝热加热的主要方式, 因此, 完整的大气应是考虑了水汽变化的湿空气。本文基于完整的湿大气动力学方程组, 系统讨论了强迫耗散非线性大气系统的定性理论及其应用, 既是对过去十余年来工作的一个总结, 也是一个深化, 同时提出一些新的观点和应用。

## 2 理论

### 2.1 Hilbert 空间中一个特殊的算子方程

采用球面坐标系  $(\lambda, \phi, r)$  ( $\lambda, \phi, r$  分别为经度、纬度和地心距离), 引入向量函数  $\mathbf{u}$ , 可将完整的湿大气运动方程组化为如下等价的算子方程<sup>[18, 22]</sup>:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + [N(\mathbf{u}) + L(\mathbf{u})] = \mathbf{F}(\mathbf{u}), & (1) \\ \mathbf{u} |_{t=0} = \mathbf{u}_0. & \text{”的} \quad (2) \end{cases}$$

由于篇幅所限, (1) 式中各项的具体形式请参见文献 [18, 22]。研究区域是围绕地球的整个大气圈。在 Hilbert 空间中,  $N(\mathbf{u})$ 、 $L(\mathbf{u})$  有如下性质: (1)  $N(\mathbf{u})$  为反伴算子,  $L(\mathbf{u})$  为自伴算子; (2)  $L(\mathbf{u})$  是对称的,  $N(\mathbf{u})$  是反对称的; (3)  $L(\mathbf{u})$  是正算子。

算子  $N(\mathbf{u})$  包括了平流过程、地转偏向力、地球曲率效应、气压梯度力和重力等的作用, 从物理上说, 它代表了系统能量转换的可逆(绝热)过程以及对能量形式不发生转换的过程。 $N(\mathbf{u})$  的反对称性表明, 它所概括的系统的上述过程对系统能量之间的转换率的总和为零。算子  $L(\mathbf{u})$  代表了系统摩擦耗散作用, 是系统能量转换的不可逆(非绝热)过程。由于  $L(\mathbf{u}) \leq 0$ , 所以摩擦耗散总是使系统的能量的“品质”降低, 使一定的能

量从能做功的形式变成不能做功的形式。以上似乎说明耗散总是起着消极的负面影响, 其实不然, 对开放系统来说, 它有着特有的正面价值<sup>[5, 6, 18, 26]</sup>。

## 2.2 解的渐近行为——全局吸引子的存在性

定理 1 算子方程 (1)、(2) 存在全局吸引子  $A$ 。

此定理表明, 随着时间的增长, 大气系统越来越靠近  $A$ 。全局吸引子  $A$  反映了系统的终态, 称为大气吸引子。由于涉及的是系统的长期行为, 也可称为气候吸引子。大气吸引子  $A$  的存在性揭示出大气系统具有向外源的非线性适应过程, 同时说明“耗散结构”的性质是大气运动的一个基本特征。 $A$  外的点代表暂态过程, 表明系统具有明显的不可逆特征。

## 2.3 有地形作用的情形

前面的讨论考虑的是地面的粘性, 未考虑地形起伏的动力作用。然而, 地形的强迫对大气运动也是十分重要的。那么, 考虑地形的强迫作用后, 前面的结论是否成立呢? 回答是肯定的, 文献 [18, 32] 给出了详细的证明。

## 2.4 非定常外源强迫情形

实际大气外源是非定常的。研究非定常外源强迫下大气运动的规律性, 对于了解和预报大规模的天气和气候运动来说, 也有着基础性的意义<sup>[4]</sup>。实际中, 外源强迫总是有界的。利用非自治的微分动力系统理论<sup>[33~37]</sup>, 对周期和准周期外源强迫情形, 可证明系统存在全局吸引子<sup>[18, 19]</sup>。

## 2.5 惯性流形

惯性流形  $M_1$ <sup>[36~38]</sup> 是有限维的、不变的光滑流形, 它以指数速率吸引系统的解轨道, 系统的全局吸引子在其上。因为全局吸引子可能是不光滑的流形, 其对系统解轨道的收敛率也不是指数控制的, 所以寻找  $M_1$  对进一步的动力分析和实际计算是重要的。

对于大尺度运动方程组<sup>[1~3, 12, 17]</sup>, 可以将其化成一类非线性演化方程的初值问题<sup>[17]</sup>, 利用截断技巧<sup>[38]</sup>可得其存在全局吸引子  $A$  和惯性流形  $M_1$ <sup>[17]</sup>, 其全局吸引子  $A$  在  $M_1$  上,  $M_1$  以指数速率吸引方程组的所有解轨道。

## 2.6 多平衡态的根源

大气环流转盘试验<sup>[39~42]</sup>和观测事实<sup>[43, 44]</sup>都说明大气环流在同样的外源强迫下可以有多个平衡态。自 Charney 等<sup>[45, 46]</sup>开创大气多平衡态理论之后, 许多作者<sup>[47~52]</sup>用类似方法——截谱模式研究了多平衡态现象。丑纪范等<sup>[2, 18, 20]</sup>研究了大气多平衡态产生的根源。

平衡态问题, 也即定常的大气运动方程组解的边值问题。因此, 方程 (1) 变为

$$N(\cdot) + L(\cdot) = (\cdot), \quad (3)$$

边界条件同前。对定常的湿大气运动方程, 可证明非线性、耗散和外源强迫三者缺一, 则要么解是唯一的, 要么无解, 不会有多解<sup>[18, 21]</sup>。这表明非线性、耗散和外源强迫三者的共同作用是产生多平衡态的根源, 即大气多平衡态是有耗散和外源相互作用的非线性机制。

## 2.7 强迫、耗散和非线性对解的影响

用 Hilbert 空间方法分别研究绝热无耗散的大气系统、绝热耗散系统、强迫无耗散系统、强迫耗散的线性系统以及强迫耗散的非线性系统, 可得它们在解的长期行为上有

根本的不同<sup>[5,18,23]</sup>: (1) 绝热无耗散的保守系统有能量守恒的性质, 初值的影响不衰减并延续到无穷。它不存在吸引子, 虽然其亦可有浑沌运动, 但吸引子的存在是耗散系统的浑沌与保守系统的浑沌的根本不同点。此外, 保守系统是可逆过程。(2) 绝热耗散的非线性系统是全局指数稳定的, 有唯一的终态且与初值无关, 这个终态就是系统的定常解。系统若没有外界能量的补充, 那么有规律的大气运动将会停止。这说明, 有耗散、无外源的系统在演化过程中愈来愈趋同, 愈来愈单调, 从而不可避免地导致任何差别、任何特殊性的消失。以上表明, 外源强迫是维持有耗散系统活化的必要条件。(3) 强迫无耗散的系统中不存在吸引子。随着时间的增长, 系统的能量不断累积, 从而趋于发散。看来, 在实际大气中强迫和耗散是相辅相成的, 有其一必有另一, 略一留一在物理上是不匹配的。因此, 对短期运动而言, 要略则共略; 对长期运动而言, 则要共同保留。以上也表明耗散是整体的稳定因素, 是有强迫系统保持整体稳化的必要条件。(4) 强迫耗散的线性系统只有唯一的定常解, 初值影响随时间增长衰减至零, 存在唯一的渐近态且与初值无关, 也就是说系统解的渐近行为表现在趋于定常解的结构上。此外, 强迫耗散的线性系统不会出现浑沌现象。可见, 非线性是出现浑沌的必要条件。

### 3 应用

#### 3.1 三类时间边界层

大气系统存在全局吸引子, 全局吸引子外的任一状态必将吸引到全局吸引子上, 而这种逼近全局吸引子的过程是很快的, 几乎是以指数控制的 (在惯性流形外是以指数速率吸引的)。因此, 这种向给定外源决定终态的适应过程是非常迅速的, 是快变过程, 非吸引子上的状态是暂时的状态。吸引子是一个不变点集, 具有相对稳定的性质, 可以看成是一种“平衡”; 所以, 在吸引子上状态的运动是慢变过程。由此可见, 当外源固定不变或变化非常缓慢时, 系统存在两种特征时间尺度: 向吸引子适应的快过程和吸引子上演变的慢过程。当外源变化时则存在第三种时间尺度, 即宏观状态随外参数变化而演变的更为缓慢的过程。这就是丑纪范<sup>[5,6,11]</sup>所指出的大气演变中主要呈现出的三种时间尺度。

曾庆存<sup>[4,53~57]</sup>在讨论绝热无摩擦大气中适应和演变过程时, 提出时间边界层的概念。在此我们将这一概念推广到强迫耗散的非线性大气中, 根据大气运动的性质和特点, 引入三类时间边界层——第一、第二时间边界层和内时间边界层。如图 1 所示, 第一时间边界层内是系统不在吸引子上的状态迅速演变到吸引子上, 其外是在吸引子上的演变过程, 对应的系统是定常外源强迫的非线性耗散系统。第一时间边界层和其外的演变过程又是第二时间边界层, 第二时间边界层外是宏观状态随外参数变化而演变的更为缓慢的过程, 即对应第三种时间尺度, 这时系统成为非定常外源强迫的非线性耗散系统。在耗散的时间尺度内, 系统可看成是绝热无摩擦的, 这样就会有通常的地转适应和演变过程, 而此时的时间边界层是强迫耗散系统的内时间边界层, 对应的系统是绝热无摩擦的保守系统。这反映出强迫耗散的非线性系统在时间边界层上的自相似结构。在三类时间边界层概念的基础上, 可以清楚地讨论强迫耗散非线性大气系统的适应和演变过程, 并可应用于分解算法的设计中。

非正常外源强迫下的非线性耗散系统

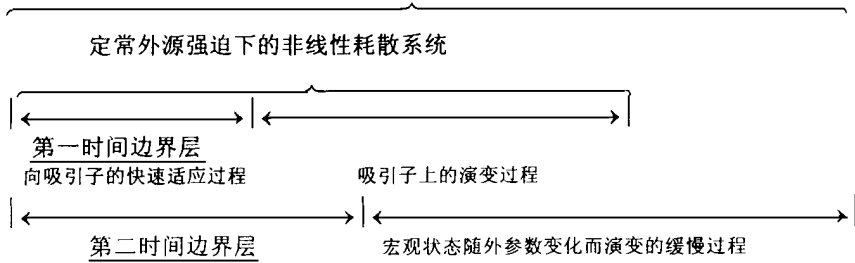


图 1 强迫耗散非线性系统的时间边界层

3.2 方程组简化的算子约束准则

进行大气动力学研究和建立数值模式时都不可避免地要对方程组进行简化。为了得到动力关系协调一致，不歪曲原方程本质属性的简化方程组，根据前面的理论结果，简化前后方程中相应算子的性质应当保持不变，这是正确简化的准则。由此简化的方程组仍然是十分严格的，不会有虚假的“源”或“汇”，仍然存在全局吸引子，并能保持原方程的整体性质及物理规律。丑纪范<sup>[1~3,5]</sup>很早就指出了这一点，文献 [18, 58] 将这一思想更具体化了。

3.3 差分格式设计及计算稳定性分析中的应用

微分方程的数值求解是一种近似方法，它涉及到数值格式的构造和计算稳定性及准确性分析<sup>[59~62]</sup>。偏微分方程的数值求解是用一个有限维系统来近似代替一个无穷维系统，算子方程就由一个状态空间变为另一个状态空间。为了尽可能地保持系统原有物理规律，就应当保持算子性质不变的原则。这是数值格式设计的一个约束原则。保持了这个原则，就有可能设计出性能良好的差分格式<sup>[18]</sup>。在设计差分格式时要求完全平方守恒是保持  $N$  的反伴性的方法之一。

现简要说明它在非线性计算稳定性分析中的一点应用。以下令  $N(\cdot)$ 、 $L(\cdot)$  离散化的一般形式分别为  $N(\cdot^*)$ 、 $L(\cdot^*)$ ，则  $N(\cdot^*)$  为反对矩阵， $L(\cdot^*)$  对称正矩阵。形如 (1) 式的方程，要研究其差分格式的计算稳定性是非常困难的，一般研究较多的是  $0$  的情形<sup>[59~62]</sup>，对于  $0$  的情形结果很少。因此，有必要引入计算准稳定性的概念。

定义 1<sup>[17]</sup> 若当时间步长  $\Delta t$  足够小时，差分法计算得到的解满足

$$|x^{n+1} - x^n| \leq c, \tag{4}$$

其中  $c$  为与  $\Delta t$  有关的常数，则称差分格式为计算准稳定的。

当  $\Delta t \rightarrow 0$  时， $c = 0$ ，此时的计算准稳定性就是计算稳定性。计算准稳定是计算稳定的必要条件。在实际中，计算准稳定的格式也常常是计算稳定的。由于非线性问题的复杂性，这里对于  $0$  的情形只在计算准稳定的基础上讨论。给出 (1) 式普遍的差分格式为

$$(x^{n+1} - x^n) / \Delta t + [N(x^n) + L(x^n)] / \Delta t = a x^{n+1} + (1 - a) x^n, \quad 0 < a < 1 \tag{5}$$

定理 2 方程 (1) 的差分格式 (5) 当  $1/2 < a < 1$  时是计算准稳定的。

当  $\Delta t = 0$  时, 格式 (5) 当  $1/2 < a < 1$  时是计算稳定的, 这与文献 [59~62] 中得到的结论一致。此外, 对于 (1) 式的线性化方程还可得到更好的结果<sup>[18]</sup>。

### 3.4 分解算法的算子约束原则

人们对分解算法已作了大量的研究<sup>[63~73]</sup>。分解算法中最重要的是分解的原则。本文根据前面的结果, 提出分解算法的算子约束原则<sup>[18]</sup>, 即分解后方程中的算子保持原方程中算子的性质不变。根据这种原则能从根本上保证分解后的方程不歪曲原方程固有的整体性质, 而且利用它来分解方程简便明了, 物理意义也十分清楚。

强迫耗散的非线性大气系统有向外源的非线性适应过程。因此, 对 (1) 式进行一级分解

$$\frac{\partial}{\partial t} + L(\cdot) = \cdot, \quad (6)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} + N(\cdot) = 0, \quad (7)$$

即外源  $\cdot$  和耗散  $L(\cdot)$  所代表的是系统变化的慢过程, 而  $N(\cdot)$  所代表的是系统中变化比  $L(\cdot)$  快的过程。对 (7) 式又包含通常所讲的适应和演变两种快慢过程。因此, 可作第二级分解

$$\frac{\partial}{\partial t} + N_i = 0, \quad i = 1, 2, \quad (8)$$

其中  $N_1$ 、 $N_2$  分别代表适应和演变过程, 它们都是反伴算子。为提高计算效率, 可对 (8) 式作第三级分解。对 (6) 式也可再分解, 即

$$\frac{\partial}{\partial t} + L_i = \cdot, \quad (9)$$

其中  $L_i$  均为自伴正算子。文献 [18] 给出具体的例子。

### 3.5 构造支撑吸引子的少数自由度

在无穷维 Hilbert 空间中, 大气系统的极限解集会收缩到有限维的流形上。因此, 从理论上说, 大气偏微分方程组解的渐近行为可以被一个有限维的常微分方程组来精确描述。这样问题变得简化多了。这有重要的实用意义。不过, 系统维数的准确估计是很关键的。目前还没有形成一套完整、准确的获得吸引子维数的方法, 尽管如此, 我们可以另辟蹊径。因为支撑吸引子的自由度是有限的, 这意味着系统在演化过程中, 运动会越来越集中到少数优势模态, 抓住这些优势模态就会对系统的演变作出比较成功的宏观描述。文献 [26] 给出了一种获取支撑气候系统吸引子的少数自由度的经验方法, 即对模式的一个现实作经验正交函数分解, 以此获得的经验“优势模态”为基底得到简化模型。用一个理论模型进行了数值模拟试验, 结果证实了此法的可行性和有效性。这方面的工作做得还很不够。

此外, 这种经验方法以实际系统的演变(即实际资料)为基础, 能够适应大气外源可变的要求, 随着系统优势模态的变异所得简化模型亦会做相应调整, 从而可望获得满意的结果。把这种方法引入数值模式中, 就会滤去小尺度或次要的波动, 而保留了长时间的波动, 也就可以有效地改进和延伸数值预报。由此看来, 这方面的工作需要深入扩展。

### 3.6 初值与模式相协调的实质

以实测资料作为模式初值会出现“初值冲击”现象，这说明实测值一般是和模式方程不协调的。因此，需要对实测初值进行处理。这里必须指出观测值有误差并不是其是否与模式方程协调的标准。根据本文结果可知，大气动力学方程组所有初值的解的终态是一有限维的全局吸引子。这在  $R^n$  空间中，就是一个体积为零的点集<sup>[3]</sup>，不妨记为  $A$ 。实测值所确定的初值取在  $A$  上是零概率。这就是说由观测资料所确定的初值一般不大可能处于吸引子上，因而和实际大气情况不一致，是和模式方程不协调的。这就是数值预报中对初值进行处理以达到与模式相协调的实质<sup>[11]</sup>。

### 3.7 多平衡态的数值分析

大气多平衡态是非线性、耗散和外源强迫三者共同作用的结果。因此，对于研究大气中出现的多平衡态现象，就必须采用强迫耗散的非线性模型，这样才有可能对观测到的现象作出比较成功的解释。从 Charney 等的开创性工作<sup>[45, 46]</sup>到其他众多的比较成功研究多平衡态的数值实验和分析工作<sup>[47~52]</sup>，采用的都是有耗散、有外源的非线性模型，这也从另一侧面验证了上述结论的正确性。

### 3.8 描述长期过程动力学模式的必备条件

根据大气动力学方程组的定性理论，一般意义上说，强迫、耗散、非线性是长期过程必须考虑的基本要素。因此，一个简化了的描述长期过程的动力学模式必须是一个强迫耗散的非线性发展方程，不是绝热无摩擦的，不是线性的。这样才能保证不会在定性上歪曲原来系统解的长期性态。否则就不会有准确的长期数值预报和气候预测。

### 3.9 下垫面异常因子自然配置信息的重要性

基于强迫耗散的非线性系统有向外源强迫的非线性适应过程，在月和季时间尺度的数值预报和模拟中就应当着重考虑下垫面的强迫作用，尤其是下垫面多个显著异常因子的自然配置型信息及其非线性相互作用。文献 [29, 30] 对此做了很有意义的研究，并用于数值模式来改进我国汛期降水预测，结果表明这是一个有希望的途径。这方面的工作尚不多，非常值得进一步深入研究。

### 3.10 一类中尺度系统的预测

对很大一类强对流中尺度系统的物理模式，从理论上说可以看作在给定的相对变化缓慢的大尺度背景场控制下，受下垫面强迫和潜热释放所作用的非线性耗散系统。观测事实也能说明这一点<sup>[27, 74, 75]</sup>。文献 [27, 28] 就是基于此，讨论了下垫面强迫产生的一类强对流中尺度系统的特征及预报方法，指出下垫面的中尺度强迫对这一类中尺度系统发生起决定性的作用。不过，由大尺度背景场和下垫面的强迫所决定的这一类强对流中尺度系统的特征和数值预报还有许多工作有待研究。

## 4 总结——问题和前景

长期数值预报和气候数值预测涉及的是系统长期演变的过程，其理论基础是强迫耗散的非线性动力学。本文基于完整的湿大气动力学方程组，系统讨论了强迫耗散的非线性大气动力学方程组解的全局渐近行为，总结和深化了过去的工作，并提出一些新的观点和应用，试图为进一步开展这方面工作起到抛砖引玉的作用。显然，强迫耗散非线性

动力学的研究还刚刚开始, 存在的问题及进一步的理论和应用工作还有很多。

根据定性理论的结果, 大气系统存在全局吸引子, 全局吸引子又由若干个吸引子和其他一些不重要的非吸引子的不变点集所瓜分。在具体的外源强迫下, 这些吸引子的结构和动力性质是怎样的, 目前的定性理论并未给出。这方面的问题难度很大, 还远没有解决。不过, 利用胞映射的方法是分析它们的有效手段之一<sup>[5,6,9,31,76]</sup>。

大气不仅存在时间上的浑沌现象, 也存在空间上的浑沌现象, 即存在时空浑沌。它在空间某个区域产生浑沌, 在另一些区域不产生浑沌。这是有限维动力系统所不具备的性质。过去的研究大多放在时间域的浑沌, 而对空间上的浑沌研究较少。因此, 当前急需发展空间浑沌的理论。大气系统空间浑沌理论的开拓及利用实际观测资料和理论揭示出大气系统分叉的空间非均匀性和空间浑沌将是一个可能获得重大突破的前沿工作<sup>[8]</sup>。

定性理论一方面是要解释实际大气中观测到的现象, 另一方面是要用于数值模式之中来改进数值预报。在这方面虽做了一些研究, 也显示出良好的前景, 但做得不多, 做得不够, 离应用于业务还有相当距离, 以后应大力加强。

定性理论在数值计算的可靠性分析中也有重要应用。目前关于具有暂态浑沌和浑沌的非线性微分方程数值算法的可靠性是很值得研究的, 而且搞清物理浑沌和计算浑沌在实际应用中确实是非常重要的, 这与算法的有效性有很大联系。这个问题不仅对计算气象学, 乃至整个计算数学都有重要价值。它涉及到从无限精度理想化到有限精度现实性的观念的转变, 对此人们还没有充分给予重视。总之, 定性理论与数值计算有着紧密的联系。定性分析的结果不仅是数值计算的重要理论依据, 同时也有助于改进数值计算方法。而数值计算的结果向定性理论提供了具体和丰富的素材。数值计算与定性分析相结合将有助于揭示强迫耗散非线性动力学的演变规律。正如丑纪范<sup>[5,6]</sup>所指出: 定性分析与数值计算的相辅相成将是面向 21 世纪的大气科学的重要特点之一。

## 参 考 文 献

- 1 丑纪范, 1983, 初始场作用的衰减与算子的特性, 气象学报, 41 (4), 385 ~ 392.
- 2 丑纪范, 1986, 长期数值天气预报, 北京: 气象出版社.
- 3 丑纪范, 1990, 大气动力学的新进展, 兰州: 兰州大学出版社.
- 4 曾庆存, 1979, 数值天气预报的数学物理基础 (第一卷), 北京: 科学出版社.
- 5 丑纪范, 1995, 大气动力学方程组的全局分析, 北京气象学院学报, (1), 1 ~ 12.
- 6 丑纪范, 1995, 大气动力学的若干进展和趋势, 现代大气科学的前沿与展望, 北京: 气象出版社, 71 ~ 75.
- 7 丑纪范、刘式达、刘式适, 1994, 非线性动力学, 北京: 气象出版社.
- 8 丑纪范, 1997, 大气科学中非线性与复杂性研究的进展、问题与展望, 中国科学院院刊, 12 (5), 325 ~ 329.
- 9 Chou Jifan, 1986, Some general properties of the atmospheric model in H space, R space, point mapping, cell mapping, *Proceedings of International Summer Colloquium on Nonlinear Dynamics of the Atmosphere*, 10 - 20 Aug., 1986, Beijing: Science Press, 187 ~ 189.
- 10 郭秉容、杜行远、丑纪范, 1986, 大气科学中的数学方法的应用, 北京: 气象出版社.
- 11 丑纪范, 1995, 四维同化的理论和新方法, 数值天气预报中的若干新技术 (廖洞贤等主编), 北京: 气象出版社, 262 ~ 294.
- 12 丑纪范, 1995, 关于短期气候预测会商综合集成的探讨, 新疆气象, 18 (5), 1 ~ 7.
- 13 汪守宏、黄建平、丑纪范, 1989, 大尺度大气运动方程组解的一些性质, 中国科学 B 辑, 19 (3), 328 ~ 336.

- 14 Lions, J. L. , Temam R. , Wang S. , 1992 , New formulations of the primitive equations of atmosphere and applications , *Nonlinearity* , **5** , 237 ~ 238.
- 15 Wang , S. , 1992 , Attractors for the 3D baroclinic quasi - geostrophic equations of large scale atmosphere , *J. Math. Anal. Appl.* , **165** , 266 ~ 283.
- 16 Lions, J. L. , Temam R. , Wang S. , 1993 , Mathematical models and mathematical analysis of the Ocean/ Atmosphere system , *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I* , **316** , 211 ~ 215.
- 17 Lions, J. L. , Temam R. and Wang S. , 1992 , On the equations of large - scale ocean , *Nonlinearity* , **5** , 1007 ~ 1053.
- 18 李建平等, 1997 , 大气和海洋动力学方程组的定性理论及其应用, 兰州大学博士学位论文, 209pp.
- 19 李建平等, 丑纪范, 1997 , 大气吸引子的存在性, 中国科学 D 辑, **27** (1) , 89 ~ 96.
- 20 李建平等, 丑纪范, 1995 , 非定常外源强迫下大尺度大气方程组解的性质, 科学通报, **49** (13) , 1207 ~ 1209.
- 21 李建平等, 丑纪范, 1996 , 大气多平衡态产生之根源, 科学通报, **41** (22) , 2061 ~ 2063.
- 22 李建平等, 丑纪范, 1998 , 湿大气方程组解的渐近性质, 气象学报 (即将发表).
- 23 Li Jianping and Chou Jifan , 1997 , The effects of external forcing , dissipation and nonlinearity on the solutions of atmospheric equations , *Acta Meteor. Sin.* , **11** (1) , 57 ~ 65.
- 24 Li Jianping and Chou Jifan , 1997 , Further study on the properties of operators of atmospheric equations and the existence of attractor , *Acta Meteor. Sin.* , **11** (2) , 216 ~ 223.
- 25 李建平等, 丑纪范, 1996 , 利用一维时间序列确定吸引子维数中存在的若干问题, 气象学报, **54** (3) , 312 ~ 323.
- 26 张邦林、丑纪范, 1991 , 经验正交函数在气候数值模拟中的应用, 中国科学 (B 辑), **21** (4) , 442 ~ 448.
- 27 李志锦、丑纪范, 1993 , 受下垫面强迫的一类强对流系统及预报, 中国科学 (B 辑), **23** (10) , 1114 ~ 1120.
- 28 李志锦, 1992 , 下垫面强迫产生的一类强对流中尺度系统的特征及其预报方法, 兰州大学博士学位论文, 62pp.
- 29 董文杰、丑纪范, 1996 , 利用数值模式改进汛期降水预报综合集成的初步探讨, 气候预测研究 (王绍武主编), 北京: 气象出版社, 119 ~ 130.
- 30 董文杰, 1996 , 我国夏季降水异常的统计分析、模式研究及预测方法探讨, 兰州大学博士学位论文, 129pp.
- 31 郭秉容、江剑民、范新刚、张红亮、丑纪范, 1996 , 气候系统的非线性特征及其预测理论, 北京: 气象出版社.
- 32 李建平等、丑纪范, 1998 , 有地形作用下大气方程组解的长期性态, 北京气象学院学报, (1) (即将发表).
- 33 Haraus, A. , 1988 , Attractors of asymptotically compact processes and application to nonlinear partial differential equations , *Comm. P. D. E.* , **13** , 1383 ~ 1414.
- 34 Chepyzhov, V. V. , Vishik M. I. , 1994 , Attractors of non - autonomous dynamical systems and their dimension , *J. Math. Pures. Appl.* , **73** , 279 ~ 333.
- 35 Chepyzhov, V. V. , Vishik M. I. , 1993 , Non - autonomous dynamical systems and their dimension , *Russ. J. Math. Physic.* , **1** (2) , 165 ~ 190.
- 36 郭柏灵, 1995 , 非线性演化方程, 上海: 上海科技教育出版社, 183 ~ 343.
- 37 殷朝阳, 1996 , 非自治无穷维动力系统的长时间性态, 兰州大学博士学位论文, 120pp.
- 38 Foias, C. , Sell G. R. and Temam R. , 1988 , Inertial manifolds for nonlinear evolutionary equations , *J. Diff. Eqa.* , **73** , 309 ~ 353.
- 39 Hide R. , 1953 , Some experiments on thermal convection in a rotating liquid , *Quart. J. R. Meteor. Soc.* , **79** , 161.
- 40 Hide, R. , 1953 , Fluid motion in the earth's core and some experiments on thermal convection in a rotating liquid , *Fluid Models in Geophysics, Proc. 1st Sympos on the Use of Models in Geophys Fluid Dynamics* , Baltimore , 101 ~ 106.
- 41 Fultz, D. , 1953 , A study of certain thermally and mechanically driven fluid systems of meteorological interest , *Proc. 1st Sympos on the Use of Models in Geophys Fluid Dynamics* , Baltimore , 27 ~ 63.
- 42 Hide, R. , 1958 , An experimental study of thermal convection in a rotating liquid , *Phil. Trans. Roy. Soc. London* , (A) , **250** , 441 ~ 478.
- 43 叶笃正、陶诗言、李麦村, 1958 , 在六月和十月大气环流的突变现象, 气象学报, **29** (3) , 249 ~ 263.
- 44 叶笃正、高由禧, 1979 , 青藏高原气象学, 北京: 科学出版社, 278pp.
- 45 Charney, J. G. , de Vore J. G. , 1979 , Multiple flow equilibria in the atmosphere and blocking , *J. Atmos. Sci.* , **36** , 1205 ~ 1216.
- 46 Charney, J. G. and Straus D. M. , 1980 , Form - drag instability , multiple equilibria and propagating planetary waves in baroclinic , orographically forced , planetary waves system , *J. Atmos. Sci.* , **37** , 1157 ~ 1176.
- 47 李麦村、罗哲贤, 1986 , 湿过程对多平衡态及副热带流型的影响, 中国科学 (B 辑), (1) , 106 ~ 112.

- 48 李麦村、罗哲贤, 1986, 平衡态向周期态的分支和副热带流型的两类低频振荡, 中国科学 (B 辑), (5), 551 ~ 560.
- 49 金飞飞、朱抱真, 1986, 强迫波、自由波和纬向气流的相互作用, I. 平衡态环流的分支, 中国科学 (B 辑), (6), 663 ~ 672.
- 50 李麦村、罗哲贤, 1986, 6 月和 10 月大气环流突变的非线性机制, 中国科学 (B 辑), (1), 106 ~ 112.
- 51 缪锦海、丁敏芳, 1985, 热力强迫下大气多平衡态的突变、副高北跳, 中国科学 (B 辑), (1), 87 ~ 96.
- 52 董步文、丑纪范, 1988, 西太平洋副热带高压脊线位置季节变化的实况分析和理论模拟, 气象学报, 46 (3), 361.
- 53 曾庆存, 1963, 大气的适应过程和演变过程 I, 气象学报, 33 (2), 163 ~ 174.
- 54 曾庆存, 1963, 大气的适应过程和演变过程 II, 气象学报, 33 (3), 281 ~ 289.
- 55 曾庆存、叶笃正, 1981, 旋转大气中运动的适应过程问题的研究 (一), 大气科学, 4 (4), 379 ~ 393.
- 56 曾庆存、叶笃正, 1982, 旋转大气中运动的适应过程问题的研究 (二), 大气科学, 5 (1), 101 ~ 112.
- 57 曾庆存, 1979, 旋转大气运动的非线性相互作用和旋转适应过程, 中国科学, (10), 986 ~ 995.
- 58 罗哲贤, 1986, 大尺度运动的形态与耗散结构, 气象学报, 44 (2), 140 ~ 148.
- 59 曾庆存, 1978, 计算稳定性的若干问题, 大气科学, 2 (3), 181 ~ 191.
- 60 曾庆存、季仲贞, 1981, 发展方程的计算稳定性问题, 计算数学, 3 (1), 79 ~ 86.
- 61 季仲贞、曾庆存, 1982, 发展方程差分格式的构造和应用, 大气科学, 6 (1), 88 ~ 94.
- 62 季仲贞、王斌、曾庆存, 1995, 完全能量守恒差分法及其应用, 数值天气预报中的若干新技术 (廖洞贤、柳崇健主编), 北京: 气象出版社, 26 ~ 46.
- 63 曾庆存、袁重光, 1980, 求解天气预报方程组的分解算法, 科学通报, 25 (18), 842 ~ 845.
- 64 曾庆存、张学洪, 1981, 完全能量守恒的可压缩时一空格式和协调的分解算法, 中国科学 (B 辑), (12), 1355 ~ 1366.
- 65 Marchuk, G. I., 1968, Short term weather prediction by splitting of the complete hydrodynamic equations, Proc. WMD/ IUGG Symp. Num. Wea. Prod., Tokyo, Nov 26 - Dec 4, II, 1 ~ 8.
- 66 Marchuk, G. I., 1972, *Numerical Methods in Weather Prediction*, New York: Academic Press.
- 67 Burridge, D. M., 1975, A split semi - implicit reformulation of the Bushby - Timpson 10 - level model, *Quart. J. R. Meteor. Soc.*, 101, 777 ~ 792.
- 68 Mesinger, F., Arakawa A., 1976, Numerical methods used in atmospheric models, I, GARP Publications Series 12, Geneva. 4.
- 69 Gadd, A. J., 1978, A split explicit intergration scheme for NWP, *Quart. J. R. Meteor. Soc.*, 104, 569 ~ 582.
- 70 陈秋士, 1980, 分析天气形式变化物理过程的一种显式分解计算方法, 第二次全国数值天气预报会议论文集, 北京: 科学出版社, 271 ~ 282.
- 71 季仲贞、王斌, 1991, 再论发展方程差分格式的构造和应用, 大气科学, 15 (2), 1 ~ 10.
- 72 王斌、季仲贞、曾庆存, 1995, 分裂算法理论的初步探讨, 计算数学, 17 (2), 115 ~ 126.
- 73 姚建国、廖洞贤, 1993, 分解算法中的两个问题, 大气科学, 17 (4), 434 ~ 441.
- 74 雷雨顺, 1980, 强对流天气的几个问题, 大气科学, 4 (1), 94 ~ 102.
- 75 叶笃正、李麦村, 1980, 大气各类运动的多尺度特性, 第二次全国数值天气预报会议论文集, 北京: 科学出版社, 181 ~ 192.
- 76 Hsu, C. S., 1987, *Cell - to - Cell Mapping — A Method of Global Analysis for Non - linear System*, Springer - Verlag.
- 77 郝柏林, 1983, 分叉、混沌、奇怪吸引子湍流及其他关于确定论系统中的内在随机性, 物理学进展, 3 (3), 329 ~ 415.
- 78 Babin, A. V. and Vishik M. I., 1983, Attractors of partial differential equations and estimate of their dimension, *Uspekhi. Mat. Nauk*, 38, 133 ~ 187.
- 79 Teman, R., 1988, *Infinite Dimensional Dynamical System in Mechanics and Physics*, Applied Math Sci Series, Vol. 38, New York: Springer - Verlag.
- 80 Ladyzhenskaya O. A., 1983, Attractor for the Navier - Stokes system and for parabolic equations and estimates of their dimension, *J. Soviet. Math.*, 28, 619 ~ 627.
- 81 Constantin P., Foias C., Teman R., 1985, Attractors representing turbulent flows, *Memoirs Amer. Math. Soc.*, 314.

## The Qualitative Theory of the Dynamical Equations of Atmospheric Motion and Its Applications

Li Jianping and Chou Jifan

(Department of Atmospheric Sciences, Lanzhou University, Lanzhou730000)

**Abstract** Based on the complete dynamical equations of the moist atmospheric motion, the qualitative theory of nonlinear atmosphere with dissipation and external forcing and its applications are systematically discussed by new theories and methods on the infinite dimensional dynamical system. The complete nonlinear dynamical equations of the moist atmospheric motion with dissipation and external forcing are rewritten as an equivalent operator equation in Hilbert space, and the properties of operators and their physical senses are studied. On the basis of the above, the existence of global attractor of the moist atmospheric system is proved, and the characteristic of nonlinear adjustment to external forcing is revealed. Furthermore, the results mentioned above are extended to the cases with orographic dynamical effect and non-stationary external forcing. Meanwhile, the existence of the inertial manifold of the atmospheric equations is investigated. On the basis of theoretical results, this paper presents three classes of time boundary layers existed in the forced dissipative nonlinear system, the principle of simplification of atmospheric equations, the principle of operator restriction of splitting algorithm and the constructive method of a few freedoms to support the base of attractor. Besides, the applications of the theoretical results to the design of difference schemes, the computational stability analysis of nonlinear evolutionary equations, the numerical analysis of atmospheric multiple equilibria, the improvement of extended forecast of numerical models and the short-term climate forecast, the analysis and prediction of one class of mesoscale system are discussed; the necessary conditions possessed in the dynamic models describing the long-time process are pointed out; and a rational explanation of the harmonization of initial values with model is given. Finally, the studied trends in future are prospected.

**Key words** atmospheric dynamics forced dissipation nonlinear dynamics global attractor qualitative analysis operator time boundary layer multiple equilibria difference scheme